УДК 539.37+539.214

Чигиринский В. В.
Плахотник В. В.
Шейко С. П.

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Введение в процессах обработки металлов давлением довольно часто приходится сталкиваться с динамическими задачами, которые влияют на параметры процесса, качество готовой продукции. К ним можно отнести высадку болтов на горизонтально-ковочных машинах, когда пластическая деформация распространяется вдоль стержня не мгновенно, образуя утолщения в удаленной его части. Также штамповку сложных тонкостенных изделий на оборудовании с увеличенной скоростью перемещения верхнего пуансона, Hasenclever (ФРГ). По данным работы [1] снижается упругая деформация механической системы, и на 1,25 мм удается получить толщину тонкостенной части меньше. Объясняется это тем, что упругая деформация системы происходит во времени. Если пластическое формоизменение в очаге деформации реализуется быстрее, чем упругая деформация системы, то следует ожидать, уменьшения зазора между бойками, следовательно, уменьшения толщины изделия. Используя такой процесс практически, можно добиться увеличения точности штамповки, сужения поля допусков.

Целью работы является разработка математической модели упругого движения распределенных масс в условиях кратковременного пластического нагружения. Доказать это интересное явление теоретически можно, когда будет отработана математическая модель предложенной динамической задачи, когда можно сопоставить процессы во времени для пластического и упругого деформирования.

Известен широкий круг задач механики, который сводится к решению волнового уравнения [2–5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

В частности, уравнения такого вида описывают упругие продольные, крутильные, поперечные колебания стержней и т. д. Уравнение (1) относится к уравнениям гиперболического типа. Решения такого типа уравнений неоднородных, более сложных, в аналитическом виде представлены в работах [6–8]. Воспользуемся подходами, сформулированными в этих работах, и запишем достаточно простую зависимость:

$$u = C \cdot Sin\theta \cdot Sin\text{А}\Phi, \tag{2}$$

где C и A – постоянные, характеризующие процесс;

θ, Φ – неизвестные функции времени и координаты.

Функции θ, Φ – непрерывные, имеют вторые производные по времени и соответствующей координате.

Подставим выражение (2) в уравнение (1), после соответствующих преобразований получим уравнение (1) в виде:

$$\left(\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx}\right) \cdot Cos\theta \cdot SinAi \; - \left[\left(\theta_t + a \cdot A\Phi_x\right) \cdot \left(\theta_t - a \cdot A\Phi_x\right) + \right.$$
$$\left. + \left(A\Phi_t + a\theta_x\right)\left(A\Phi_t - a\theta_x\right)\right] \cdot Sin\theta \cdot SinAi \; + 2\left(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x\right) Cos\theta \cdot CosAo \; +$$
$$+ \left(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}\right) \cdot Sin\theta \cdot CosAo \; = 0, \tag{3}$$

где $\theta_t = \dfrac{\partial \theta}{\partial t}, A\Phi_x = \dfrac{\partial A\Phi}{\partial x}$ и т. д.

Рассмотрим упрощающие варианты решения уравнения (3). Их несколько:

1-й вариант:

$$\theta_t = -aA\Phi_x, \; A\Phi_t = -a\theta_x;$$

2-й вариант:

$$\theta_t = aA\Phi_x, \; A\Phi_t = a\theta_x;$$

3-й вариант:

$$\theta_t = -aA\Phi_x, \; A\Phi_t = a\theta_x;$$

4-й вариант:

$$\theta_t = aA\Phi_x, \; A\Phi_t = -a\theta_x.$$

Подставляя первые два варианта в уравнение (3), получим:

$$\left(\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx}\right) \cdot Cos\theta \cdot SinA\Phi + 2\left(\theta_t \mathrm{A\Phi}_t - a^2 \theta_x \mathrm{A\Phi}_x\right) Cos\theta \cdot Cos\mathrm{A\Phi} +$$
$$+ \left(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}\right) \cdot Sin\theta \cdot CosA\Phi = 0.$$

Уравнение (3) превратится в тождество, если операторы, стоящие в скобках перед тригонометрическими функциями превратятся в нули. Согласно вариантам 1 и 2 появились упрощения в (3) с первыми производными. Рассмотрим вторые производные, используя записи вариантов 1 и 2.

1-й вариант:

$$\theta_{tt} = -aA\Phi_{xt}, \; A\Phi_{tt} = -a\theta_{xt};$$
$$\theta_{tx} = -aA\Phi_{xx}, \; A\Phi_{tx} = -a\theta_{xx};$$

2-й вариант:

$$\theta_{tt} = a\mathrm{A\Phi}_{xt}, \; \mathrm{A\Phi}_{tt} = a\theta_{xt};$$
$$\theta_{tx} = a\mathrm{A\Phi}_{xx}, \; \mathrm{A\Phi}_{tx} = a\theta_{xx}.$$

Из этого следует:

$$\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0; \;\; \theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x = 0; \;\; A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0. \tag{4}$$

В справедливости выражений (4) можно убедиться, подставляя вторые производные. В разных сочетаниях скобки, стоящие перед тригонометрическими функциями в уравнении (3) превращаются в нули. Действительно:

$$\left(\left(\mp a\mathrm{A\Phi}_{xt}\right) - \left(\mp a\mathrm{A\Phi}_{tx}\right)\right) \cdot Cos\theta \cdot Sin\mathrm{A\Phi} + 2\left(\left(\mp a\mathrm{A\Phi}_x \mathrm{A\Phi}_t\right) - a\left(\mp \mathrm{A\Phi}_t\right)\mathrm{A\Phi}_x\right) Cos\theta \cdot Cos\mathrm{A\Phi} +$$
$$+ \left(\left(\mp a\theta_{xt}\right) - \left(\mp a\theta_{tx}\right)\right) \cdot Sin\theta \cdot CosA\Phi \equiv 0.$$

Следовательно, решение уравнения (1) имеет вид:

$$u = C \cdot Sin\theta \cdot Sin\mathrm{A\Phi},$$

при

$$\theta_t = \mp aA\Phi_x, \; A\Phi_t = \mp a\theta_x. \tag{5}$$

Следует подчеркнуть, что условие (5) определяет не сам вид функции удовлетворяющий, уравнению (1), а ограничения, которые накладываются на функции.

Варианты 3 и 4 не обеспечиваются необходимыми упрощениями при подстановке зависимости (5) в (1), из чего следует, что (5) при следующих упрощениях $\theta_t = -aA\Phi_x$, $A\Phi_t = a\theta_x$ и $\theta_t = aA\Phi_x$, $A\Phi_t = -a\theta_x$ не являются решениями уравнения (1). Следует подчеркнуть, что функции θ и $A\Phi$ одновременно каждая могут зависеть и от времени и от координаты очага деформации.

На базе полученного результата решение можно представить в более сложном виде:

$$u = C_0 \cdot (C_1 Sin\theta + C_2 Cos\theta) \cdot (C_3 Sin A\Phi + C_4 Cos A\Phi). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (1) и группируя, появляются операторы, которые были получены ранее, (4):

$$\left.\begin{aligned}
&\{C_1C_3(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}) - C_2C_4(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}) - \\
&- 2C_1C_4(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x) - C_2C_3[(\theta_t + a\cdot A\Phi_x)\cdot(\theta_t - a\cdot A\Phi_x) + \\
&+ (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)]\} Cos\theta \cdot Sin A\Phi + \\
&+ \{C_1C_3[(\theta_t + a\cdot A\Phi_x)\cdot(\theta_t - a\cdot A\Phi_x) + (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)] - \\
&- 2C_2C_4(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x) + C_1C_4(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}) + \\
&+ C_2C_3(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx})\} Sin\theta \cdot Sin A\Phi + \{2C_1C_3(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x) - \\
&- C_2C_4[(\theta_t + a\cdot A\Phi_x)\cdot(\theta_t - a\cdot A\Phi_x) + (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)] + \\
&+ C_1C_4(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}) + C_2C_3(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx})\} \cdot Cos\theta \cdot Cos A\Phi + \\
&+ \{C_1C_3(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}) - C_2C_4(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}) - \\
&- C_1C_4\,[(\theta_t + a\cdot A\Phi_x)\cdot(\theta_t - a\cdot A\Phi_x) + (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)] - \\
&- 2C_2C_3(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x)\} Sin\theta \cdot Cos A\Phi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В процессе преобразований в уравнении (7) появляются те же соотношения (4), что и в уравнении (3). Это, несмотря на различные сочетания, вновь введенных коэффициентов, и тригонометрических функций. Таким образом, решение (6) будет удовлетворять уравнение (1) при условии, когда имеют место отношения между функциями вида:

$$\theta_t = \mp aA\Phi_x, \; A\Phi_t = \mp a\theta_x.$$

Из соотношений (4) имеем дифференциальные уравнения в частных производных, где разрешающими функциями будут вводимые в рассмотрение функции θ и $A\Phi$. Эти уравнения по конструкции и типу соответствуют уравнению (1). С учетом последних замечаний для (1) имеем:

$$\begin{gathered}
u = C_0 \cdot (C_1 Sin\theta + C_2 Cos\theta) \cdot (C_3 Sin \mathrm{A\Phi} + C_4 Cos \mathrm{A\Phi}); \\
\theta_t = \mp aA\Phi_x; \; A\Phi_t = \mp a\theta_x; \\
\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0; \; A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

С учетом (8) неопределенность для функций θ и $A\Phi$ ликвидирована, т. к. существуют дифференциальные уравнения, позволяющие эти функции найти. Один из вариантов может быть получен в случае простейшего решения гиперболического уравнения для $A\Phi$, $A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0$, т. е.:

$$A\Phi = A \cdot x \cdot t.$$

При этом:

$$\theta_t = a \cdot A \cdot t\,; \quad a \cdot \theta_x = A \cdot x\,.$$

Интегрируя, получим:

$$\theta = A\frac{a \cdot t^2}{2} + f(x)\,; \;\; \theta = A\frac{x^2}{2a} + f(t)\,.$$

Или:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot A\left(a \cdot t^2 + \frac{x^2}{a}\right).$$

Следует убедиться, удовлетворяет функция θ гиперболическому уравнению $\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0$. После подстановки имеет место тождество $Aa - a^2 A \cdot \frac{1}{a} \equiv 0$. При этом не исключается, что приведенным выше соотношениям удовлетворяются решения полученные методом разделения переменных.

Из представленного частного решения видно, что аргументы тригонометрических функций не являются функцией только одного переменного. Каждая зависит одновременно от времени и координаты, но эти функции разные и определяются соотношениями (5) или (8) и не являются линейными.

Учитывая, что волновое уравнение линейное, окончательный результат можно представить в виде суперпозиции решений:

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} C_{i,0} \cdot \left(C_{i,1} Sin\theta_i + C_{i,2} Cos\theta_i\right) \cdot \left(C_{i,3} Sin \mathrm{A}_i \Phi_i + C_{i,4} Cos \mathrm{A}_i \Phi_i\right); \quad \theta i_{i,t} = \mp a \mathrm{A}_i \Phi_{i,x}\,;$$

$$\mathrm{A}_i \Phi_{i,t} = \mp a\theta_{i,x}\,; \;\; \theta_{i,tt} - a^2 \cdot \theta_{i,xx} = 0\,; \;\; A\Phi_{i,tt} - a^2 A\Phi_{i,xx} = 0\,. \tag{9}$$

Анализ полученных результатов. Решения (8), (9) можно привести к уже известным решениям, которые изложены в работе [3]. Используя метод разделения переменных, получено выражение u_n:

$$u_n = \left(A_n Cos\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at + B_n Sin\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at\right) \cdot Sin\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\,. \tag{10}$$

Установим соответствие коэффициентов в решениях (8) и (10) и определим соотношения между функциями. Очевидно:

$$C_2 = B_n\,; \;\; C_1 = A_n\,; \;\; \theta = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at\,; \;\; A\Phi = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\,; \;\; C_0 = 1\,, \; C_4 = 0\,.$$

Тогда с учетом упрощений имеем:

$$u_n = \left(A_n Cos\theta + B_n Sin\theta\right) \cdot Sin A\Phi\,.$$

Покажем, что между функциями, приведенными в работе [3], существуют соотношения вида (5), (6) и (8). Действительно:

$$\theta_t = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a\,, \;\; A\Phi_x = \frac{\pi \cdot n}{l}\,, \;\; A\Phi_t = 0\,, \; \theta_x = 0\,.$$

Подставляя в соотношения:

$$\theta_t = \mp aA\Phi_x\,, \; A\Phi_t = \mp a\theta_x\,,$$

убеждаемся, что они удовлетворены, имеют вид:

$$\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a = a \cdot \frac{\pi \cdot n}{l}, \;\; 0 = a \cdot 0.$$

Функции $\theta = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at$ и $A\Phi = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x$ удовлетворяют гармоническим дифференциальным уравнениям (8):

$$\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0; \;\; A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0.$$

Таким образом, функции в выражении (10) удовлетворяет указанным соотношениям функций представленных в решениях (8) и являются частным решения.

Следует подчеркнуть, что в решениях (8), (9) определяется не вид самих функций, которые удовлетворяют волновое уравнение, а условия существования этих функций, что формулирует общие подходы получения искомого решения. При предлагаемой постановке и решении появляется возможность расширения круга решаемых задач за счет большего разнообразия граничных и начальных условий.

ВЫВОДЫ

В обработке металлов давлением имеют место разнообразные динамические задачи, требующие своего решения. Получено аналитическое частное решение волнового уравнения. Определены условия существования функций, входящих в решение задачи. Зависимости аргументов тригонометрических функций разные и определяются одновременно двумя переменными, временем и координатой, удовлетворяя при этом приведенным условиям существования рассматриваемых функций. Условия существования функций, входящих в предложенное решение задачи, удовлетворены уже известными выражениями, полученными методом разделения переменных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Норицин И. А. Проектирование кузнечных и холодноштамповочных цехов и заводов / И. А. Норицин. – М. : Высшая школа, 1977. – 422 с.

2. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Л. : Машиностроение, 1976. – 320 с.

3. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 724 с.

4. Бабанов И. М. Теория колебаний / И. М. Бабанов. – М. : Наука, 1968. – 560 с.

5. Бронштейн И. М. Справочник по математике / И. М. Бронштейн, К. Л. Семендяев. – М. : Наука, 1964. – 608 с.

6. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В. В. Чигиринский // Изв вузов. Черная металлургия. – 2009. – № 5. – С. 11–16.

7. Чигиринский В. В. Новый метод решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. – Запорожье, 2008. – № 1. – С. 57–62.

8. The Influence of the Temperature Factor on Deformability of the Plastic Medium / V. V. Chygyryns'kyy, I. Mamuzic, F. Vodopivec, I. V. Gordienko // Metalurgija. Zagreb. – 2006. – Vol. 45, br. 2. – P. 115–118.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой ЗНТУ;
Плахотник В. В. – канд. техн. наук, доц. НГУ;
Шейко С. П. – канд. техн. наук, доц., докторант ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.
НГУ – Национальный государственный университет, г. Днепропетровск.

E-mail: valerij@zntu.edu.ua

Статья поступила в редакцию 23.10.2012 г.